noch eine praktikable Teilbarkeitsregel für die 7*

Holger Krug

4. Februar 2008

Eine generische Teilbarkeitsregel wird vorgestellt und begründet. Es wird gezeigt,wie sie mit den Teilern 7 und 17 angewendet werden kann, Rechenübungen werden vorgestellt, die befähigen, die Regel im praktischen Kopfrechnen anzuwenden.

1 Vergleich mit [2]

Bereits in [2] habe ich eine Teilbarkeitsregel für die 7 vorgestellt; die damalige und die hier vorzustellende Regel haben einige charakteristische Gemeinsamkeiten und Unterschiede:

- Beide bestehen in Algorithmen, mit denen nicht nur festgestellt werden kann, ob eine gegebene Zahl durch 7 teilbar ist : es kann sogar der Rest ermittelt werden, der bei Division der gegebenen Zahl durch 7 übrigbleibt.
- Beide beruhen auf der Dezimaldarstellung der Zahl, deren Teilbarkeit durch 7 geprüft werden soll.
- In beiden wird diese Dezimaldarstellung von links nach rechts abgearbeitet. Beide können deshalb angewandt werden, während die Zahl, deren Teilbarkeit durch 7 geprüft werden soll, niedergeschrieben bzw. gelesen wird; beide können bei einiger Übung im Kopfrechnen[1] und in den verfahrensspezifischen Rechentechniken sogar

[1] mit *Kopfrechnen* im Sinne dieses Beitrags ist **"Rechnen angesichts der geschriebenen Zahl"**, deren Teilbarkeit geprüft werden soll, gemeint, so dass also die Zwischenergebnisse der innerlich (im Kopf) durchgeführten Rechnung immer wieder gedanklich an das Schriftbild der Zahl angeheftet werden können und dadurch in fester Weise gegliedert werden können Ohne diese Stütze durch das Schriftbild sind die Verfahren insbesondere bei sehr großen Zahlen nur sehr schwer "im Kopf" durchzuführen

*dieser Beitrag ist ein Fortsetzung und Ergänzung von [2], Übungs- und Unterrichtsmaterialien zu in der Geschwindigkeit des Lesens bzw. Schreibens der Zahl angewandt werden, so dass also, sobald die Zahl gelesen oder geschrieben ist, auch ihr Rest bei Division durch 7 bekannt ist.

- Beide sind insofern *generisch*, als dass sie nicht nur für den Teiler 7 genutzt werden können. In [2] habe ich dargestellt, wie die damalige Regel auch mit den Teilern 11 und 13 verwendet werden kann. Der Versuch, das damalige Verfahren auch mit dem Teiler 17 zu verwenden, würde jedoch in Schwierigkeiten des praktischen Rechnens führen, die fraglich erscheinen lassen, ob nicht die einfache Durchführung des schriftlichen Divisionsalgorithmus der Anwendung der Teilbarkeitsregel aus Geschwindigkeitsgründen vorzuziehen ist und vermuten lassen, dass sie im praktischen Rechnen auch aus Bequemlichkeitsgründen (Gewohnheit) vorgezogen werden wird, im Gegensatz dazu kann das hier vorzustellende Verfahren auch z.B. mit dem Teiler 17 im praktischen Kopfrechnen effizient eingesetzt werden.

- Zur sicheren und effizienten Beherrschung beider Verfahren, müssen spezifische Vorübungen (siehe dazu Abschnitt 3 unten) durchgeführt werden. In beiden Verfahren hängen die durchzuführenden Vorübungen von dem Teiler ab. Um das in [2] vorgestellte Verfahren, sicher beherrschen zu können, müssen das Addieren und Multiplizieren modulo des Teilers geübt werden.

- Beide Verfahren können in der Schule unterrichtet werden. [2]

  Die vorliegende Darstellung unterscheidet sich von der Darstellung in [2] dadurch, dass hier das praktische Erüben der zur effizienten Beherrschung der Verfahren vorausgesetzten Fähigkeiten stärker betont wird, um dem Leser die Bedingungen deutlich zu machen, unter denen die oben gemachten Behauptungen: **Lesegeschwindigkeit = Rechengeschwindigkeit** resp. **Schreibgeschwindigkeit = Rechengeschwindigkeit** gemacht wurden; durch diese Ausführlichkeit kann die Lektüre der vorliegenden Darstellung dem versierten Mathematiker etwas langweilig werden. Die Ausführlichkeit kann jedoch dazu dienen, die vorliegende Darstellung einem größeren Kreis von Lesern zugänglich zu machen. Der versierte Mathematiker wird für die geringfügig größeren Lesemühen durch den Genuss belohnt, den es mit sich bringt, wenn schon gute Rechenfähgkeiten weiter vervollkommt

[2]Ich habe das in [2] vorgestellte Rechenverfahren in der dort angedeuteten Weise in der 8. und auch 9. Klasse meiner Schule,der Freien Waldorfschule am Illerblick, Ulm unterrichtet, es hat sich dabei gezeigt, dass insbesondere Schüler,die sonst wenig Freude am Rechnen hatten, mit besonderer Hingabe dabei waren. Gründe dafür waren meiner Beobachtung nach sowohl die Schwierigkeit als auch die Einfachheit des Verfahrens: Die Schwierigkeit, dass anders zu rechnen ist, als gewohnt (Wann hat $3 \cdot 5$ sonst schon das Ergebnis 1 ?) führt zu einer ganz feinen Freude, die jeder erleben, kann, der sich mit derartigen Rechnungen intensiv genug befasst, und die Rechenerlebnisse gefühlsmäßig begleitet. Diese Schwierigkeit kann, da sie mit der Einfachheit verbunden ist, dass sich das Rechnen vorwiegend im Bereich überschaubar kleiner Zahlen (nämlich der Reste) abspielt, auch von weniger rechenstarken Schülern gut gemeistert werden und führt dann zu dem motivierenden Erfolgserlebnis *“ Ich kann etwas, was sonst kaum jemand kann. Und das macht auch noch Spass!”*

beiden Beiträgen können von [1] geladen werden

werden.

2 Benennung der Verfahren

Das hier vorzustellende Rechenverfahren besteht, wie sich weiter unten zeigen wird, darin, dass die Zahl n, deren Rest r bei Division durch den Divisor d berechnet werden soll, schrittweise auf den Rest r *reduziert* wird. Deshalb kann dieses Verfahren sinnvollerweise *Reduktionsverfahren zum Teiler* d genannt werden. Für das Verfahren von [2] habe ich noch keinen geeigneten Namen gefunden. **Namensvorschläge** nehme ich gerne entgegen Für den Rest dieses Beitrags werde ich das in [2] vorgestellte Verfahren *Restklassenverfahren* nennen.

3 Vorübungen

3.1 für das Restklassenverfahren

Oben in Abschnitt 1 wurde bereits erwähnt, dass, um das Restklassenverfahren effizient zu beherrschen, sicheres Addieren und Multiplizieren modulo[3] des Divisors notwendig sind. Für das Addieren modulo des Divisors dürfte ein versierter Rechner aufgrund der Ähnlichkeit mit dem gewöhnlichen Addieren keine besondere Vorübung benötigen. Er muss sich lediglich daran gewöhnen, die Summanden noch vor der Addition auf Ihren Rest bezüglich des Divisors zu reduzieren, und die Summe unmittelbar nach der Addition ebenso auf Ihren Rest zu reduzieren . Um das Multiplizieren modulo des Divisors sicher zu beherrschen, empfiehlt sich die folgende Übung: Man beginne mit der Zahl 1 und multipliziere die im Laufe der Übung entstehenden Zahlen schrittweise mit 3, dabei modulo 7 rechnend.Das Ergebnis ist der Zyklus der Potenzen der 3 modulo 7: $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3$.[4] Mit dem Faktor 5 anstelle 3 ergibt sich der Zyklus der Potenzen der 5: $1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5$.

Während in [2] diese Frage, welche Vorübungen nämlich zum effizienten Beherrschen des dort vorgestellten Restklassenverfahrens befähigen, nur kurz gestreift wurde, soll die entsprechende Frage für das Reduktionsverfahren hier ausführlicher behandelt werden: Um das Reduktionverfahren zum Teiler d effizient zu beherrschen, muss man in der Lage sein, für alle ganzen Zahlen zwischen d und $10 \cdot d$ schnell den Rest bei Division durch d

[3] Rechnen *modulo* eines Divisors bedeutet, dass vor Durchführung der Rechenoperation die Operanden der Rechnung auf ihren Rest bei Division durch den Divisor reduziert werden und dass nach Durchführung der Rechenoperation das Ergebnis auf seinen Rest reduziert wird. Die Rechnung $19 \cdot 10 = 190$ wird also z. B. *modulo* 7 in folgender Weise durchgeführt: $19 \equiv 5 \pmod 7$,$10 \equiv 3 \pmod 7$ und $5 \cdot 3 = 15 \equiv 1 \pmod 7$. Der Wert der modulo-Rechnung besteht darin, dass der Rest des Ergebnisses der normalen Rechnung (im Beispiel: 190) identisch ist dem Ergebnis der modulo-Rechnung (im Beispiel:1): $190 \equiv 1 \pmod 7$. die modulo- Rechnung erlaubt also, diesen Rest mit geringerem Aufwand zu ermitteln.

[4] Eine gute Ergänzung dieser Übung stellt der Versuch dar, Gleichungen wie $3 \cdot x = 1$ modulo 7 zu lösen. Zur Gleichungslösung kann man sich die Vielfachen der 3 modulo 7 vergegenwärtigen:$0, 3, 6, 2, 5, 1$. Die Lösung der obigen Gleichung ist also $x = 5$.

zu ermitteln. Geeignete Vorübungen dazu werden im Folgenden vorgestellt:

3.2 für das Reduktionsverfahren zum Teiler 7

Nach dem soeben Gesagten, muss Ziel der Vorübungen für den Teiler 7 sein, für alle ganten Zahlen zwischen 7 und 70 den Rest bei Division durch 7 schnell (d.h.: im Stehgreif, ohne Innehalten) bestimmen zu können. Ein erfahrener und geübter Rechner wird dazu ohne besondere Vorübung bereits in der Lage sein, Wer sich dazu durch besondere Übungen vorbereiten will, kann die im folgenden Abschnitt vorgeschlagene Übung für den Teiler 17 entsprechend an den Teiler 7 anpassen.

3.3 für das Reduktionsverfahren zum Teiler 17

Ziel der hier vorzustellenden Vorübung muss sein, für alle ganzen Zahlen zwischen 17 und 170 ohne Innehalten den Rest bei Division durch 17 bestimmen zu können . Der erste Schritt auf dem Weg zu dieser Fähigkeit besteht darin, sich die Vielfachen der 17 zwischen 17 und 170 ins Bewusstsein zu rufen, zuerst additiv und damit von 0 bis 170 aufsteigend:$17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170$, anschließend zur Festigung subtraktiv und damit von 170 bis 0 absteigend:$170, 153, 136, 119, 102, 85, 68, 51, 34, 17$.Um nach dieser Vorbereitung den Rest einer Zahl zwischen 17 und 170 z. B. von 151 bei Division durch 17, zu berechnen erinnere man das nächstkleinere Vielfache der 17, im Beispiel 136, und ziehe es ab: 151 ergibt bei Division durch 17 also den Rest $151 - 136 = 15$. Das übe man solange mit weiteren Zahlen zwischen 17 und 170, bis man in der Lage ist, den Rest ohne Innehalten zu nennen.[5]

4 Mathematische Grundlagen

In [2] wurde das dort vorgestellte Restklassenverfahren lediglich oberflächlich begründet. Bei der Begründung wurde als mathematische Grundlage implizit verwendet, dass Reste, die bei Division durch eine Zahl d entstehen, ebenso addiert und multipliziert werden können wie die Zahlen, deren Rest sie sind. Im Folgenden wird als mathematische Grundlage für das Reduktionsverfahren verwendet, dass sich der Rest r einer ganzen Zahl n bei Division durch d nicht ändert, wenn man von n ein beliebiges Vielfaches $z \cdot d$ von d abzieht:[6]

$$n - z \cdot d \equiv n \pmod d$$

5 Das Reduktionsverfahren

Das Reduktionverfahren wird hier am Beispiel des Teilers 17 vorgestellt, Die Übertragung auf andere Teiler bereit keine Schwierigkeiten. Wie bereits in Abschnitt 2 gesagt,

[5]Übungsmaterialien zum systematischen Durchführen der vogestellten Übungen stehen auf [1] zum Download bereit

[6]Die Richtigkeit dieser beiden als mathematische Grundlagen für die beiden Verfahren genannten

besteht das Reduktionsverfahren darin, dass die Zahl n, deren Rest r bei Division durch 17 ermittelt werden soll, schrittweise auf den Rest r reduziert wird. Die Reduktion geschieht wie in Abschnitt 3.3 bereits für die Zahlen zwischen 17 und 170 geübt dadurch, dass solange Vielfache des Teilers d von n subtrahiert werden, wie das möglich ist. Nach dem in Abschnitt 4 Gesagtem ändern derartige Subtraktionen den Rest bei Division durch 17 nicht. Das Spezifische des Reduktionsverfahrens besteht in der Art, wie die Subtraktionen auf die Dezimaldarstellung von n abgestimmt sind. Das Reduktionsverfahren wird zunächst an einem Beispiel vorgestellt: Es sei der Rest zu bestimmen, der bei Division von 824.651.324.556 durch 17 übrigbleibt Die Bestimmung des Restes verläuft in den folgenden Schritten:

1. Zunächst muss ein Präfix [7] von 824.651.324.556 gewählt werden, dessen Rest bei Division durch 17 aufgrund der Vorübungen von Abschnitt 3.3 leicht bestimmt werden kann.
2. hier biete sich 82 als Präfix an, 82 ergibt bei Division durch 17 den Rest $82-68 = 14$
3. nun wird das gewählte Präfix durch seinen Rest bei Division durch 17 ersetzt. Es entsteht die Zahl 144.651.324.556, diese hat nach Abschnitt 4 den selben 17-erRest wie die Ausgangszahl, 824.651.324.556, denn sie entstand aus ihr durch Subtraktion eines Vielfachen von 17, der Zahl $680.000.000.000 = 4 \cdot 17 \cdot 10.000.000.000$
4. mit der Zahl 144.651.324.556 werden jetzt die vorgehenden Schritte wiederholt, bis eine Zahl ensteht, die nicht mehr weiter reduziert werden kann, weil sie kleiner ist als 17, mithin ein 17er Rest ist.

Insgesamt verläuft die Reduktion von 824.651.324.556 in den folgenden Schritten, wobei jeweils das gewählte Präfix unterstrichen ist und die Zahl, um die das Präfix reduziert wird, über dem Pfeil angegeben ist:

$$\underline{82}4.651.324.556 \xrightarrow{-68} \underline{144}.651.324.556 \xrightarrow{-136} \underline{8.6}51.324.556 \xrightarrow{-85} \underline{151}.324.556$$
$$\xrightarrow{-136} \underline{15.3}24.556 \xrightarrow{-153} \underline{24}.556 \xrightarrow{-17} \underline{7.5}56 \xrightarrow{-68} \underline{75}6 \xrightarrow{-68} \underline{76} \xrightarrow{-68} \boxed{8}$$

Der Rest von 824.651.324.556 bei Division durch 17 ist also 8.

Gesetzmäßigkeiten kann man sich leicht klarmachen,wenn man sich verdeutlicht, dass zwischen der zu teilenden Zahl n, dem Rest r, dem Divisor d und dem Ergebnis der Division, dem Quotienten q die folgenden Beziehungen bestehen: $n = q \cdot d + r$ und $r < d$

[7] mit dem *Präfix* einer Zahl n in Dezimaldarstellung ist hier eine Zahl gemeint, deren Dezimaldarstellung den Anfang der Dezimaldarstellung von n bildet, Z.B. ist 1 in diesem Sinne ein Präfix von $\underline{1}0$, 2213 hat in diesem Sinne die Präfixe 2, 22, 221 und 2213 selbst

Wer diesen Rechenprozess mit mehreren großen Zahlen intensiv übend nachvollzieht[8], wird bemerken,dass das sichere Beherrschen des in Abschnitt 3.3 Geübten die entscheidende Voraussetzung für das flüssige Rechnen ist. Eine Hauptschwierigkeit beim Rechnen ist das Festhalten der Stelle in der Ausgangszahl, bis zu der das Präfix bereits konsumiert wurde. Diese Schwierigkeit fällt weg, wenn gerechnet wird, während die Zahl niedergeschrieben wird und die Rechengeschwindigkeit der Schreibgeschwindigkeit entspricht. In diesem Fall ist die Stelle, bis zu der die Zahl bereits geschrieben wurde auch die Stelle, bis zu der das Präfix konsumiert wurde. Da das Reduktionsverfahren als Rechenverfahren zum Kopfrechnen gemeint ist,spielt die oben gewählte Form der Niederschrift der Schritte des Reduktionsverfahrens keine wesentliche Rolle. sie soll nur dem Leser in verständlicher Form deutlich machen, wie das Reduktionsverfahren zu vollziehen ist, keineswegs ist sie als Vorschlag einer Form der Niederschrift während des Rechnens gemeint. Andere Formen der Niederschrift, wie z. B. die jetzt folgende, hätten demselben Zweck der Verständlichmachung in gleicher Weise dienen können:

$$
\begin{array}{rl}
824.651.324.556 & -68 \\
144.651.324.556 & -136 \\
8.651.324.556 & -85 \\
151.324.556 & -136 \\
15.324.556 & -153 \\
24.556 & -17 \\
.7556 & -68 \\
756 & -68 \\
76 & -68 \\
\boxed{8} &
\end{array}
$$

Beim aufmerksamen Nachvollziehen der Schritte des Reduktionsverfahrens wird die Ähnlichkeit dieses Verfahrens zum schriftlichen Divisionsalgorithmus deutlich: wie bei der schriftlichen Division so wird auch bei der Reduktion die zu teilende Zahl von links nach rechts verarbeitet, indem geeignete Präfixe konsumiert werden. Aufgrund dieser Ähnlichkeit beider Verfahren ist es dem geübten Rechner möglich, einen Weg zu finden, wie während der Reduktion die Zwischenergebnisse so innerlich protoklliert werden, dass am Ende der Reduktion nicht nur der Rest,sondern auch der Quotient bekannt sind.

Der Vollständigkeit halber soll noch gezeigt werden, wie dieselbe Zahl 824.651.324.556 mittels des Reduktionverfahrens auf ihren Rest bezüglich des Divisors 7 reduziert werden kann:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \underline{8}24.651.324.556 \xrightarrow{-7} \underline{12}4.651.324.556 \xrightarrow{-7} \underline{54}.651.324.556 \xrightarrow{-49} \underline{5.6}51.324.556 \\
& \xrightarrow{-56} \underline{51}.324.556 \xrightarrow{-49} \underline{2.3}24.556 \xrightarrow{-21} \underline{22}4.556 \xrightarrow{-21} \underline{14}.556 \xrightarrow{-14} \underline{55}6 \xrightarrow{-49} \\
& \qquad \underline{66} \xrightarrow{-56} \underline{10} \xrightarrow{-7} \boxed{3}
\end{aligned}
$$

[8] Übungsmaterialien dazu stehen auf [1] zum Download bereit

Bei einem Vergleich dieser Beispielrechnung mit einer entsprechenden mit dem Restklassenverfahren durchgeführten(siehe für ein Beispiel,[2]., S.39f), wird offenkundig, dass das Reduktionsverfahren im praktischen Kopfrechnen einfacher zur Berechnung des Siebenerrestes führt als das Restklassenverfahren. Diesem praktischen Vorzug des Reduktionsverfahren steht entgegen, dass das Restklassenverfahren den ganzen Menschen nach Gefühl, Wille und Denken beansprucht, während das Reduktionsverfahren vorwiegend die Kräfte des denkenden Vorstellens übt. Wenn man also als Lehrer Schüler im Rechenunterricht nicht nur zu guten Rechnern formen will, sondern auch in Erwägung zieht, was das zu Übende an den Schülern ausbildet, wird man beide Verfahren in Betracht ziehen, wenn man sich dazu entschließt, die Teilbarkeitslehre über das übliche Maß hinaus im Unterricht zu vertiefen.Hinzu kommt, dass mit dem Restklassenverfahren die gewohnten und eingeschliffenen Wege des Rechnens verlassen werden und den Schülern erlebbar wird, dass es selbst in scheinbar festgefügten und fertigen Gebieten, wie dem elementaren Rechnen sich lohnt , die üblichen Pfade zu verlassen und mit Denkgewohnheiten zu brechen [9]

6 Erratum zu [2]

Die Druckversion von [2] enthält auf S. 40 einen Fehler, falsch ist nämlich $\begin{matrix}824651324556\\155051210563\end{matrix}$, richtig wäre hingegen: $\begin{matrix}824651324556\\155052210563\end{matrix}$, Dank dem aufmerksamen Leser für den Hinweis! In der Onlineversion ist der Fehler bereits korrigiert.

Literatur

[1] HolgerKrug. Aufsätze und Etüden zu Teilbarkeitsregeln. ∗, 5, 8, 9

[2] Holger Krug. Eine praktikable Teilbarkeitsregel fuer die 7. *Jupiter*, 2(1):39–42, 2007. 1, ∗, 2, 2, 3.1, 4, 5, 6

[9] Gerne trete ich mit Lehrer-Kolleginnen , die eines der beiden Verfahren im Unterricht einsetzen wollen oder bereits eingesetzt haben, in Erfahrungsaustausch. Ich habe dazu auf [1] einen Bereich eingerichtet, über den die Kontaktaufnahme und auch der Download von Unterrichts- und Übungsmaterialien möglich sind.