Eine praktikable Teilbarkeitsregel für die 7

Holger Krug

26. Oktober 2007

1 Das Ergebnis

Eine auch für große Zahlen praktikable Teilbarkeitsregel für die 7 lautet:

> Multipliziere die erste Ziffer mit 3, addiere die zweite Ziffer, multipliziere das Ergebnis mit 3, addiere die nächste Ziffer und setze mit Multiplikation und Addition fort, bis Du die letzte Ziffer addiert hast. Wenn Du die Rechnung modulo 7 durchgeführt hast, ist das Ergebnis der Siebenerrest der Ausgangszahl.

Ist also 824651324556 durch 7 teilbar? Ihr Siebenerrest lautet:

$$(\ldots((1\cdot 3+2)\cdot 3+4)\ldots)\cdot 3+6 \equiv 3 \pmod 7$$

Siebenerreste sind die Zahlen 0 bis 6. Da die Rechnung in Siebenerresten durchgeführt wird, kommen als Zwischenergebnisse nur Zahlen zwischen 0 und 6 vor. Lediglich innerhalb der Multiplikationen können Zahlen bis $6\cdot 3 = 18$ entstehen, was durch Restbildung auf 4 reduziert wird.

Alternativ können als Siebenerreste auch die Zahlen -3 bis 3 verwendet werden. In diesem Fall können innerhalb der Mutliplikationen Zahlen zwischen $-3\cdot 3 = -9 \equiv -2$ und $3\cdot 3 = 9 \equiv 2$ entstehen.

In jedem Fall spielt die gesamte Rechnung im Bereich einstelliger, maximal kleiner zweistelliger Zahlen. Sie ist insofern einfach und praktikabel.

Um ihren Charakter kennenzulernen, nehme man sich einige große Zahlen und übe die Berechnung des Siebenerrestes nach dem vorgestellten Verfahren. Man vergesse dabei nicht, unmittelbar beim Lesen einer neuen Ziffer, nach jeder Addition und nach jeder Multiplikation den Siebenerrest zu bilden. Man rechne einmal mit $0\ldots 6$ als Siebenerresten, das andere Mal mit $-3\ldots 3$.

Bei der Übung wird sich, wenn die anfängliche Schwierigkeit der Rechnung modulo 7 überwunden ist, herausstellen, dass ihre Hauptschwierigkeit darin besteht, im rhythmischen Rechnen wach zu bleiben. Habe ich gerade multipliziert oder addiert? Welche Ziffer habe ich als letzte addiert?

Um dieser Schwierigkeit Herr zu werden, empfiehlt es sich im praktischen Rechnen, die Zwischenergebnisse nach erfolgter Restbildung und vor der Multiplikation mit 3 unter der Zahl, deren Rest berechnet werden soll, zu protokollieren. Für das obige Beispiel ergibt sich:

824651324556
155052210563

Aus dem Protokoll ist nicht nur ersichtlich, dass der Siebenerrest von 824651324556 3 ist, sondern z.B. auch, dass 8246 und 824651324 durch 7 teilbar sind, da beide den Siebenerrest 0 haben.

2 Die Begründung

Die Begründung des vorgestellten Rechenverfahren ist einfach: Jede Dezimalzahl entsteht aus ihren Ziffern durch fortwährende Multiplikation mit 10 und anschließende Addition, solange bis die letzte Ziffer addiert wurde. Das gegebene Rechenverfahren ist nichts anderes als diese Entstehung einer Dezimalzahl aus ihren Ziffern modulo 7. Insbesondere wird aus der Multiplikation mit 10 in Siebenerresten die Multiplikation mit 3. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} 8246 &= ((8 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 4) \cdot 10 + 6 \\ &\equiv ((1 \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 4) \cdot 3 + 6 \\ &\equiv (5 \cdot 3 + 4) \cdot 3 + 6 \\ &\equiv 5 \cdot 3 + 6 \\ &\equiv 0 \pmod 7 \end{aligned}$$

3 Ein Weg

Bisher wurde ein Rechenverfahren vorgestellt und begründet, nicht jedoch gezeigt, auf welchem Weg es gefunden, eingesehen und auch vor Schülern vorgestellt werden kann.[1] Ein solcher Weg ergibt sich durch Erweiterung der bekannten Prüfung der Teilbarkeit durch 9 mittels Quersummenbildung.[2]

Am Anfang dieses Wegs steht die Beobachtung, dass die Quersumme nicht nur genau dann durch 9 teilbar ist, wenn die Ausgangszahl es ist, sondern dass Quersumme und

[1] Mit dieser Bemerkung ist nicht gesagt, dass das vorgestellte Verfahren zur Prüfung der Teilbarkeit durch 7 in der Schule unterrichtet werden **soll**. Es wird allerdings skizziert werden, wie es unterrichtet werden **kann**, insbesondere jedoch auch, wie der Leser sich das vorgestellte Verfahren selbst zur vollständigen Klarheit bringen kann.

[2] Vergleiche das Folgende mit: Arnold Bernhard, *Die Division durch 9 und die Neunerprobe* in Peter Baum (Hg.), *Mathematikthemen für die 9.Klasse*, Kassel 1999, 149-161

Ausgangszahl sogar denselben Neunerrest haben. Der Neunerrest einer Zahl kann deshalb durch mehrfache Quersummenbildung bestimmt werden:

$$9567438594397 \to 79 \to 16 \to 7$$

Diese Erkenntnis lenkt den Blick von den Zahlen auf ihre Neunerreste. Kann die Quersummenbildung $9+5+6+7+4+3+8+5+9+4+3+9+7$ direkt in Neunerresten geschehen? $9+5$ ist 14 mit Neunerrest 5, $5+6$ ist 11 mit Neunerrest 2, ..., $0+7$ ist 7 mit Neunerrest 7. Das Rechnen mit Neunerresten kann nun geübt werden.

Mit Schülern kann an dieser Stelle ein regelmäßiges Neuneck gezeichnet werden, dessen Ecken mit den Neunerresten beschriftet sind. Es können Additions- und Multiplikationstafeln für Neunerreste entwickelt werden. Es können die Reihen der Vielfachen eines Rests besprochen und die entsprechenden Sternfiguren gezeichnet werden.

In diesem Arbeiten mit Neunerresten entsteht die Frage: Warum gerade die 9? Durch Übergang zu anderen Teilern, z.B. der 7, wird deutlich, dass nicht nur mit Neunerresten gerechnet werden kann, sondern z.B. auch mit Siebenerresten. Einige Besonderheiten der 9, wie das Vorkommen von Nullteilern ($3 \cdot 6 \equiv 0$) und Nullwurzeln ($3^2 \equiv 0$), kommen bei der 7 nicht vor, wie auch beim Zeichnen keiner der verschiedenen Siebensterne in Dreiecke oder andere Vielecke zerfällt. Hier wird die Primzahlnatur der 7 erlebbar.

Zurückkehrend zu der Prüfung der Teilbarkeit durch 9 kann nun die Frage entstehen: Warum ist die Prüfung der Teilbarkeit durch 9 um so vieles einfacher, als die Prüfung der Teilbarkeit durch 7? Worin liegt der Grund dafür, dass ich, um die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 zu prüfen, lediglich die Quersumme bilden muss?

Die Bildung der Quersumme hängt wesentlich von der Darstellung der Zahl im Zehnersystem ab. In einem anderen Zahlensystem würde sich eine ganz andere Quersumme ergeben. Das Zehnersystem besagt, dass jede Ziffer ein 10-fach höheres Gewicht hat, als die rechts von ihr stehende:

$$8246 = ((8 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 4) \cdot 10 + 6$$

Führe ich diese Rechnung in Neunerresten durch so zeigt sich, dass die modulo 9 berechnete Quersumme gerade der Neunerrest einer Zahl ist:

$$\begin{aligned} 8246 &= ((8 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 4) \cdot 10 + 6 \\ &\equiv ((8 \cdot 1 + 2) \cdot 1 + 4) \cdot 1 + 6 \\ &\equiv 8 + 2 + 4 + 6 \\ &\equiv 2 \pmod 9 \end{aligned}$$

Das Besondere der 9 ist also, dass der Neunerrest der 10 als Basis des Dezimalsystems gerade 1 ist: $10 \equiv 1 \pmod 9$. Der Siebenerrest der 10 hingegen ist 3, also muss bei der Prüfung der Teilbarkeit durch 7 und der Berechnung des Siebenerrests das Zwischenergebnis jeweils vor dem Übergang zur nächsten Ziffer mit 3 multipliziert werden.

4 Erweiterungen

Das gegebene Verfahren zur Berechnung des Siebenerrests einer Zahl ist nicht auf 7 und 9 beschränkt. Weitere Teiler, für die es praktikabel ist, sind 11 und 13.

Mit 11 als Teiler muss mit dem Elferrest der 10, also mit -1, multipliziert werden. Da die Multiplikation mit -1 beim Rechnen mit Elferresten nichts anderes ist als die Bildung des Komplements zur 11, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
8246 &\equiv ((8 \cdot -1 + 2) \cdot -1 + 4) \cdot -1 + 6 \\
&\equiv ((3 + 2) \cdot -1 + 4) \cdot -1 + 6 \\
&\equiv (6 + 4) \cdot -1 + 6 \\
&\equiv 1 + 6 \\
&\equiv 7 \pmod{11}
\end{aligned}$$

Mit 13 als Teiler muss mit -3 multipliziert werden.

$$\begin{aligned}
8246 &\equiv ((8 \cdot -3 + 2) \cdot -3 + 4) \cdot -3 + 6 \\
&\equiv ((2 + 2) \cdot -3 + 4) \cdot -3 + 6 \\
&\equiv (1 + 4) \cdot -3 + 6 \\
&\equiv 11 + 6 \\
&\equiv 4 \pmod{13}
\end{aligned}$$

Für die hierbei notwendige Multiplikation mit -3 gibt es zwei Wege:

1. Multipliziere mit 3, bilde den Dreizehnerrest und dann das Komplement zur 13.
2. Bilde das Komplement zur 13, multipliziere mit 3 und bilde dann den Dreizehnerrest.